

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN FISICA

LIMITI DI MISURA QUANTISTICI E PERDITE:
UNA STRATEGIA DI PROTEZIONE

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Presentata da:

ELEONORA CAPOCASA

Relatore:

Dott.

GIANCARLO CELLA

Controrelatore:

Prof.

LUCIANO BRACCI

Anno Accademico 2009 – 2010

Indice

1	Introduzione	1
2	Concetti introduttivi	5
2.1	Quantizzazione del campo E.M. e formalismo a due fotoni	5
2.2	Stati coerenti	7
2.3	Stati squeezed	10
2.4	La funzione di Wigner	12
2.5	Rivelatori interferometrici di onde gravitazionali	15
3	Una strategia di protezione	20
3.1	Il problema dell'amplificazione	20
3.2	Il beam splitter	21
3.3	Misura del segnale e dell'errore nello stato in uscita dall'interferometro	23
3.4	Il problema delle perdite	24
3.5	Amplificazione: una strategia di protezione	27
4	Cenni sulla realizzazione pratica di alcune tecniche presentate	32
4.1	Realizzazione dello squeezing	32
4.2	Rotazioni del fascio per mezzo di cavità risonanti	34
4.3	Rivelazione omodina	36

Capitolo 1

Introduzione

In un rivelatore interferometrico di onde gravitazionali, lo spostamento relativo delle masse che costituiscono gli specchi delle cavità ottiche risonanti, dovuto al passaggio dell'onda, è in grado di produrre un segnale ottico rivelabile. Esistono diverse fonti di rumore in grado di generare segnali ottici spuri che interferiscono con quello dovuto al passaggio dell'onda. Il rumore sismico, dovuto al continuo moto del terreno, e il rumore termico, dovuto al moto di agitazione termica, causano direttamente un movimento degli specchi.

Il cosiddetto rumore quantistico[2], che sarà uno dei principali limiti alla sensibilità per rivelatori delle prossime generazioni, agisce con un meccanismo un poco diverso.

Usualmente si distinguono due contributi. Il primo è detto shot noise. Al contrario del rumore termico o sismico non è causato dal movimento degli specchi, può essere bensì interpretato come effetto statistico legato alla indeterminazione del numero di fotoni nel fascio laser. Risulta predominante per valori bassi della potenza del laser (basso numero di fotoni) e ad alta frequenza.

Il secondo è detto rumore di pressione di radiazione. Dato che anche l'ampiezza del campo elettromagnetico è affetta da fluttuazioni quantistiche, avremo una pressione di radiazione fluttuante che agirà sugli specchi muovendoli. L'effetto aumenta all'aumentare della potenza del laser e domina a basse frequenze, dove la risposta meccanica dello specchio alla pressione è più grande.

Un'espressione compatta per lo spettro di potenza del rumore quantistico in un rivelatore interferometrico di onde gravitazionali può essere scritto nella forma

$$S_h(f) = \frac{h_{SQL}^2(f)}{2} \left[K(f) + \frac{1}{K(f)} \right] \quad (1.1)$$

dove $K \propto I_0 f^{-2}$ al di sotto della frequenza di taglio delle cavità risonanti (I_0 è l'intensità dal laser) e $h_{SQL} \propto f^{-1}$. Dalla dipendenza da I_0 per quanto detto in precedenza riconosciamo che il rumore legato alla pressione di radiazione è descritto dal termine $K h_{SQL}^2 \propto I_0 f^{-4}$, mentre lo shot noise da $K^{-1} h_{SQL}^2 \propto I_0^{-1}$.

Regolando opportunamente la potenza del laser si può trovare ad una data frequenza \bar{f} il miglior compromesso fra shot noise e rumore di pressione di radiazione, e dall'espressione precedente vediamo che questo

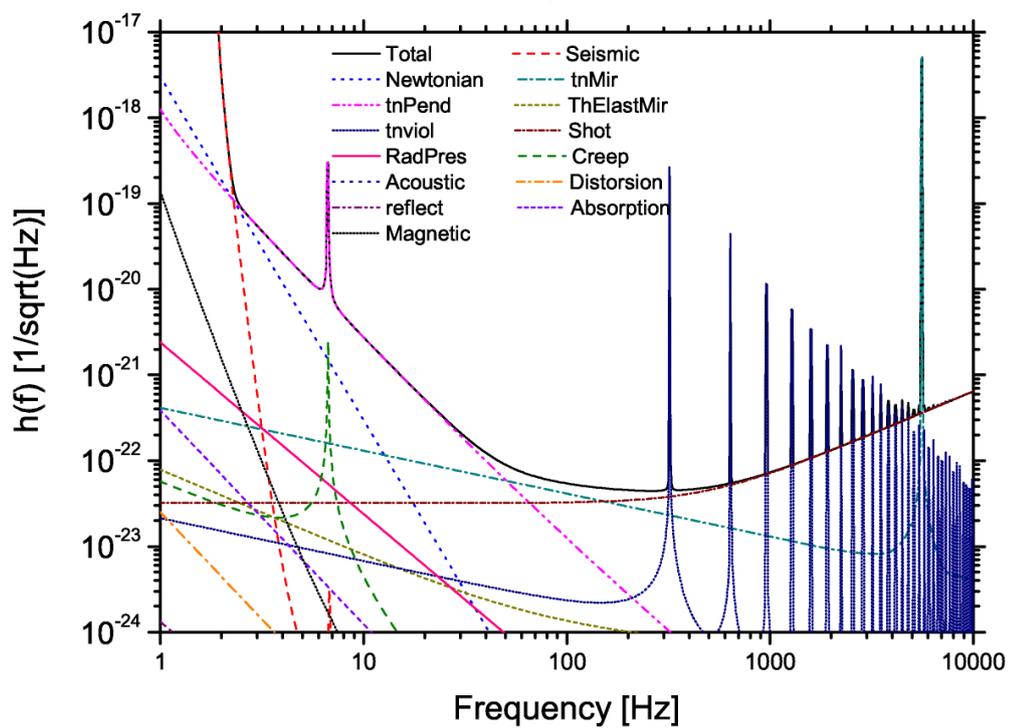


Figura 1.1: Curva di sensibilità per VIRGO. Sono riportati i diversi contributi all'ampiezza spettrale del rumore (in unità $\text{Hz}^{-1/2}$) in funzione della frequenza. I due contributi legati al rumore quantistico sono il rumore di pressione di radiazione (**RadPres**, linea rosa continua) e lo shot noise (**Shot**, linea marrone tratteggiata).

si ottiene al particolare valore di I_0 per il quale $K(\bar{f}) = 1$, e vale

$$S_h^{MIN}(\bar{f}) = h_{SQL}^2(\bar{f}) = \frac{\hbar}{\pi^2 L^2 M \bar{f}^2} \quad (1.2)$$

dove L è la lunghezza delle cavità ed M la massa degli specchi. Questo limite inferiore per il rumore quantistico è detto standard quantum limit (SQL).

Shot noise e pressione di radiazione sono in realtà interdipendenti. Questo può essere interpretato come una manifestazione del principio di indeterminazione di Heisenberg che postula l'impossibilità di misurare simultaneamente con precisione arbitraria due grandezze coniugate come la posizione e il momento degli specchi. Dato che l'Hamiltoniana che descrive l'evoluzione temporale di un modo della radiazione elettromagnetica è formalmente identica a quella di un oscillatore armonico questa relazione di indeterminazione si può applicare direttamente e predice a livello semiclassico la relazione

$$\Delta E \Delta(\bar{E}\phi) \geq k \quad (1.3)$$

dove E è l'ampiezza del campo, \bar{E} il suo valore medio, ϕ la sua fase e k una opportuna costante.

Nel prossimo futuro il rumore quantistico diverrà probabilmente uno dei fondamentali problemi da risolvere nell'ambito delle misure gravitazionali di alta precisione. Diverse strategie sono state proposte allo scopo di evadere lo standard quantum limit, in particolare l'uso di sorgenti laser di luce squeezed.

Un laser ordinario può essere considerato con buona approssimazione uno stato coerente della radiazione elettromagnetica. In questo caso non si ha squeezing, e l'indeterminazione di ampiezza è uguale al prodotto dell'indeterminazione di fase per il valore medio del campo,

$$\Delta E = \Delta(\bar{E}\phi) \quad (1.4)$$

In uno stato squeezed l'uguaglianza (1.4) non è più valida. Ad esempio l'indeterminazione di fase può ridursi a spese dell'indeterminazione di ampiezza, che inevitabilmente aumenta per mantenere valida la relazione (1.3). Dato che l'informazione sul segnale di un'eventuale onda gravitazionale è codificato nella fase del campo, è immediato comprendere che in uno stato di questo tipo il rumore quantistico può ridursi.

Un possibile limite di questo approccio, che in linea teorica permetterebbe di aumentare la sensibilità delle misure oltre lo SQL, è legato all'inevitabile presenza di perdite ottiche dell'apparato, ad esempio nella fase di rivelazione del fascio. Tali perdite, come vedremo nel dettaglio, tendono a deteriorare le caratteristiche del fascio, distruggendone lo squeezing e riducendo così il rapporto segnale-rumore.

In questa tesi verrà discusso un possibile metodo, basato sull'amplificazione quantistica, per proteggere l'informazione contenuta in uno stato squeezed dalle perdite inevitabilmente presenti nell'apparato di misura.

Nel primo capitolo introdurremo brevemente gli strumenti teorici utilizzati nella trattazione, come gli stati coerenti e la relazione di questi con quelli squeezed. Faremo un breve cenno alla funzione di Wigner della quale ci siamo indirettamente serviti nel descrivere le caratteristiche del fascio.

Nel secondo capitolo analizzeremo il funzionamento di alcuni dispositivi ottici utilizzati nella trattazione, come ad esempio il beam splitter che sfrutteremo per modellizzare le perdite causate dalla rivelazione.

Presenteremo quindi una strategia di amplificazione quantistica associata a opportune trasformazioni unitarie degli stati, in particolare rotazioni e trasformazioni di squeezing. Discuteremo la possibilità di proteggere l'informazione contenuta in uno stato squeezed dal rumore reintrodotta dalle perdite ottiche. Per valutare la migliore strategia prenderemo in esame diverse classi di trasformazioni unitarie e massimizzeremo il rapporto segnale-rumore sui parametri della classe, per un dato valore delle perdite. Evidenzieremo le trasformazioni che risulteranno più efficaci e osserveremo come l'amplificazione del fascio risulti efficace solo se applicata in maniera mirata.

L'approccio al problema sarà essenzialmente teorico. In un capitolo finale verranno però brevemente discusse le possibilità pratiche di realizzazione della strategia suggerita.

Capitolo 2

Concetti introduttivi

2.1 Quantizzazione del campo E.M. e formalismo a due fotoni

In questa trattazione utilizzeremo una descrizione quantizzata dei campi elettromagnetici che costituiscono le nostre sorgenti di luce. L' espressione che descrive il campo elettrico è data da

$$\vec{E} = i \sum_k \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}} \left[a_k \vec{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t} - a_k^\dagger \vec{u}_k^*(\vec{r}) e^{i\omega_k t} \right] \quad (2.1)$$

con a_k e a_k^\dagger operatori. Per concentrarci sull'evoluzione temporale del campo, consideriamo fissate la componente spaziale e la polarizzazione così da poter fattorizzare il vettore $\vec{u}_k(\vec{r})$. Se selezioniamo solo le frequenze positive abbiamo[3]

$$E^+ = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{Ac}} a_\omega e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.2)$$

Dove con A indichiamo l'area della sezione trasversale efficace del fascio e con a_ω l'operatore di distruzione le cui relazioni di commutazione sono

$$\left[a_\omega, a_{\omega'} \right] = 0 \quad \left[a_\omega, a_{\omega'}^\dagger \right] = 2\pi\delta(\omega - \omega') \quad (2.3)$$

Vogliamo esprimere il campo in funzione di bande di frequenza laterali, attorno ad una frequenza angolare "portante" ω_0 . Indicheremo con $\omega_\pm = \omega_0 \pm \Omega$ la frequenza angolare della banda laterale separata dalla portante di $\pm\Omega$. Siamo interessati a valori di Ω nel range delle onde gravitazionali che vogliamo osservare, e quindi tali che $\Omega/\omega_0 \sim 3 \times 10^{-13}$. Definiamo quindi gli operatori

$$a_+ \equiv a_{\omega_0 + \Omega} \quad a_- \equiv a_{\omega_0 - \Omega} \quad (2.4)$$

con le relative relazioni di commutazione

$$\left[a_+, a_{+'}^\dagger \right] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega') \quad \left[a_-, a_{-'}^\dagger \right] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega') \quad (2.5)$$

e scriviamo E^+ in funzione di a_+ e a_-

$$E^+ = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_0}{Ac}} e^{-i\omega_0 t} \int_0^\infty (a_+ e^{-i\Omega t} + a_- e^{+i\Omega t}) \frac{d\Omega}{2\pi} \quad (2.6)$$

Per farlo abbiamo fatto l'approssimazione $\omega_0 \pm \Omega \simeq \omega_0$ sotto radice dal momento che Ω/ω_0 è molto piccolo e abbiamo esteso all'infinito l'integrale.

Per i nostri scopi risulterà conveniente trattare il campo non in termini di modi di singoli fotoni, i cui operatori di distruzione sono a_+ e a_- , ma in termini di modi di due fotoni correlati. Questo perché nelle cavità risonanti dell'interferometro l'interazione tra laser e specchi in movimento può essere descritta come una modulazione della portante, ossia come una conversione coerente di un fotone appartenente ad essa in una coppia a frequenze correlate ω_+ e ω_- . Definiamo quindi gli operatori

$$a_1 = \frac{a_+ + a_{-'}^\dagger}{\sqrt{2}} \quad a_2 = \frac{a_+ - a_{-'}^\dagger}{\sqrt{2}i} \quad (2.7)$$

Con le relative relazioni di commutazione

$$\left[a_1, a_{2'}^\dagger \right] = - \left[a_2, a_{1'}^\dagger \right] = i2\pi\delta(\Omega - \Omega') \quad (2.8)$$

$$\left[a_1, a_{1'} \right] = \left[a_1, a_{1'}^\dagger \right] = \left[a_{1'}^\dagger, a_{1'} \right] = \left[a_1, a_{2'} \right] = \left[a_{1'}^\dagger, a_{2'}^\dagger \right] = 0 \quad (2.9)$$

dove ancora abbiamo usato l'approssimazione $\omega_0 \pm \Omega \simeq \omega_0$.

Dall'espressione di E^+ trovata sopra e dalla relazione $E^- = (E^+)^\dagger$ scriviamo l'espressione di $E = E^+ + E^-$ in funzione di a_1 e a_2

$$E = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_0}{Ac}} \left[\cos \omega_0 t \int (a_1 e^{-i\Omega t} + a_1^\dagger e^{+i\Omega t}) \frac{d\Omega}{2\pi} + \sin \omega_0 t \int (a_2 e^{-i\Omega t} + a_2^\dagger e^{+i\Omega t}) \frac{d\Omega}{2\pi} \right] \quad (2.10)$$

Vediamo che è possibile interpretare a_1 e a_2 come le ampiezze complesse delle quadrature $\sin(\omega_0 t)$ e $\cos(\omega_0 t)$. Per rendere questo più esplicito scriviamo il campo come

$$E = E_1(t) \cos \omega_0 t + E_2(t) \sin \omega_0 t \quad (2.11)$$

e vediamo che a_1 e a_2 sono gli operatori quantistici associati alla variazione nel tempo dell'ampiezza delle quadrature. Come abbiamo detto, con questo formalismo risulta particolarmente semplice descrivere gli effetti che subisce un fascio nell'attraversare dispositivi ottici come l'interferometro.

Possiamo chiarire meglio questo punto con un semplice modello classico. Immaginiamo uno specchio perfettamente riflettente che oscilla attorno alla posizione $x = 0$ secondo la legge $x_S(t) = \epsilon \cos \Omega t$. Supponendo $\epsilon \Omega \ll c$ (moto non relativistico) data un'onda monocromatica diretta verso di esso dalla regione $x < 0$ della forma

$$E_{IN} = E_0 \cos \omega_0 \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (2.12)$$

potremo scrivere l'onda riflessa nella forma

$$E_R = E_0 \cos \omega_0 \left(t - \frac{2x_S(t)}{c} + \frac{x}{c} \right) \quad (2.13)$$

ossia

$$\begin{aligned} E_R \simeq & E_0 \left[1 + O \left(\frac{\omega_0 x_S}{c} \right)^2 \right] \cos \omega_0 \left(t + \frac{x}{c} \right) + \\ & + E_0 \left[\frac{2\omega_0 x_S(t)}{c} + O \left(\frac{\omega_0 x_S}{c} \right)^3 \right] \sin \omega_0 \left(t + \frac{x}{c} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Vediamo che il moto dello specchio ha introdotto una dipendenza temporale nelle ampiezze delle componenti $\cos \omega_0 t$ e $\sin \omega_0 t$. In particolare se l'ampiezza di oscillazione dello specchio ϵ è piccola rispetto alla lunghezza d'onda della portante possiamo considerare $\omega_0 x_S/c \ll 1$ e vediamo che, facendo riferimento alla (2.11)

$$E_1(t) = E_0 \quad (2.15)$$

$$E_2(t) = \frac{2E_0\omega_0\epsilon}{c} \cos \Omega t \quad (2.16)$$

nel campo riflesso saranno quindi presenti le ampiezze (classiche) $a_2(\Omega)$ e $a_2^*(\Omega)$.

In un interferometro reale gli specchi si muovono anche in risposta alla pressione di radiazione dello stesso campo incidente. Di conseguenza le ampiezze $E_1(t)$ ed $E_2(t)$ del campo riflesso risultano correlate, un fenomeno che interpreteremo nel seguito in termini di squeezing.

2.2 Stati coerenti

Una base che risulta essere molto appropriata per la descrizione dei campi ottici che trattiamo è quella costituita dagli stati coerenti[4]. Questi stati sono stati a minima indeterminazione, il prodotto delle incertezze di ampiezza e di fase ha infatti il valore minimo permesso dal principio di indeterminazione di Heisenberg. Per questo motivo sono gli stati quantistici che più si avvicinano ad una descrizione classica dei campi. Si può generare uno stato coerente utilizzando un operatore unitario detto "di traslazione"

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) \quad (2.17)$$

dove α è un numero complesso che possiamo scrivere come $|\alpha| e^{i\theta}$. L'operatore $D(\alpha)$ ha le seguenti proprietà

$$D^\dagger(\alpha) = D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha) \quad D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha \quad (2.18)$$

Lo stato coerente $|\alpha\rangle$ è generato applicando allo stato di vuoto $|0\rangle$ l'operatore di traslazione

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} |0\rangle \quad (2.19)$$

Possiamo rappresentare lo stato di vuoto come una “circonferenza d'errore” centrata all'origine degli assi x e p e lo stato coerente $|\alpha\rangle$ come la traslazione di questa di un vettore di modulo $|\alpha|$ e fase θ . Vedremo in seguito come dare un senso preciso a questa “circonferenza d'errore”, introducendo la funzione di Wigner. Anticipiamo che si tratta di una circonferenza perché l'indeterminazione della quadratura “ruotata”

$$\Delta X_\beta \equiv \Delta(x \cos \beta + p \sin \beta)$$

risulta indipendente dalla direzione β .

In questa rappresentazione (vedi Figura (2.1)) risulta intuitivo individuare due nuove quadrature, quella di ampiezza (nella direzione parallela ad α , X_θ) e quella di fase (nella direzione perpendicolare ad α , $X_{\theta+\pi/2}$). Se identifichiamo il valore dell'ampiezza media del campo \bar{E} con $|\alpha|$ abbiamo le seguenti relazioni fra le incertezze delle nuove quadrature

$$\Delta X_\theta = \Delta E, \quad \Delta X_{\theta+\pi/2} = \Delta(\bar{E}\theta) \quad (2.20)$$

e, come abbiamo detto in precedenza,

$$\Delta X_\theta = \Delta X_{\theta+\pi/2} \quad (2.21)$$

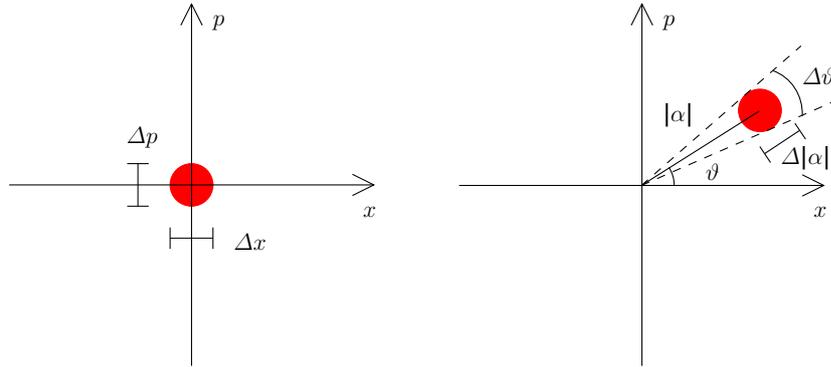


Figura 2.1: A sinistra, la rappresentazione associata allo stato di vuoto. A destra, la rappresentazione di uno stato coerente di parametro $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$.

Gli stati coerenti hanno, inoltre, la proprietà di essere autostati dell'operatore di distruzione a

$$D^\dagger(\alpha) a |\alpha\rangle = D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) |0\rangle = (a + \alpha) |0\rangle = \alpha |0\rangle \quad (2.22)$$

moltiplicando entrambi i membri per $D(\alpha)$ otteniamo l'equazione agli autovalori.

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (2.23)$$

È interessante fare alcune osservazioni sull'evoluzione temporale di tali stati. Dall'equazione di Heisenberg otteniamo facilmente l'evoluzione temporale degli operatori \hat{a} e \hat{a}^\dagger

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}, \hat{H}] = \frac{1}{i\hbar} \hbar\omega [\hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{a}] = -i\omega [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \hat{a} = -i\omega \hat{a} \\ \frac{d\hat{a}^\dagger}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}^\dagger, \hat{H}] = \frac{1}{i\hbar} \hbar\omega [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger \hat{a}] = -i\omega \hat{a}^\dagger [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = i\omega \hat{a}^\dagger \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \hat{a}_t &= e^{-i\omega t} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_t^\dagger &= e^{i\omega t} \hat{a}_0^\dagger \end{aligned}$$

Per vedere come variano nel tempo degli operatori \hat{x} e \hat{p} e i relativi valori di aspettazione, possiamo scriverli in termini di \hat{a} , \hat{a}^\dagger e troviamo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{x}_t \\ \hat{p}_t \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_t \\ \hat{a}_t^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_0^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{p}_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{p}_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi per i valori di aspettazione abbiamo

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \langle \alpha | \hat{x}_t | \alpha \rangle \\ \langle \alpha | \hat{p}_t | \alpha \rangle \end{pmatrix} &= \left\langle \alpha \left| \begin{pmatrix} \hat{x}_t \\ \hat{p}_t \end{pmatrix} \right| \alpha \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \left\langle \alpha \left| \begin{pmatrix} \hat{a}_t \\ \hat{a}_t^\dagger \end{pmatrix} \right| \alpha \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{-i\omega t} \\ \alpha^* e^{i\omega t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t} \\ -i\alpha e^{-i\omega t} + i\alpha^* e^{i\omega t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Osserviamo che gli operatori seguono un'evoluzione temporale classica e di conseguenza lo stato coerente $|\alpha\rangle$ rappresentato nel piano x, p evolve nel tempo ruotando. Se calcoliamo la dipendenza temporale della varianza otteniamo

$$\langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 = \frac{1}{2} \quad (2.24)$$

$$\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 = \frac{1}{2} \quad (2.25)$$

Vediamo che questa resta costante e che quindi uno stato coerente che evolve nel tempo continua ad essere tale.

2.3 Stati squeezed

Indichiamo con il nome di stati squeezed tutti quelli stati che in una quadratura presentano indeterminazione minore di quella che ha uno stato coerente. Inevitabilmente, per soddisfare il principio di indeterminazione, il rumore nell'altra quadratura sarà maggiore di quello di uno stato coerente. Questa asimmetria delle incertezze nelle due quadrature determina una deformazione della circonferenza d'errore con cui rappresentiamo gli stati coerenti che diventa quindi un'ellisse. Definiamo così l'operatore unitario di squeezing per un singolo modo

$$S(\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon^* a^2 - \frac{1}{2}\varepsilon a^{\dagger 2}\right) \quad (2.26)$$

Lo stato squeezed $|\alpha, \varepsilon\rangle$ è ottenuto applicando al vuoto l'operatore di squeezing e in seguito quello di traslazione (Figura 2.2).

$$|\alpha, \varepsilon\rangle = D(\alpha) S(\varepsilon) |0\rangle \quad (2.27)$$

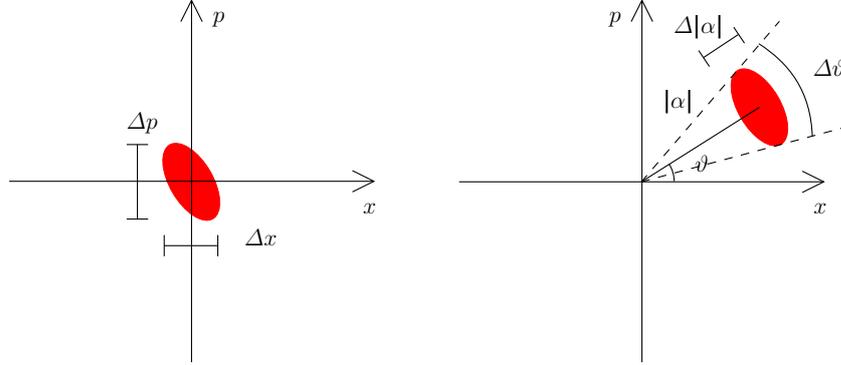


Figura 2.2: A destra la rappresentazione di un vuoto squeezed, ottenuto applicando l'operatore di squeezing allo stato di vuoto. A sinistra lo stato squeezed ottenuto dopo l'applicazione dell'operatore di traslazione.

Noi siamo interessati a particolari stati di luce squeezed detti "stati squeezed a due modi". Questi stati ci interessano in quanto, come già osservato, i dispositivi ottici che utilizziamo producono luce a due frequenze correlate, che indichiamo con ω_+ e ω_- , solitamente disposte simmetricamente ai lati della frequenza portante ω_0 . Abbiamo quindi $\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \Omega$. Possiamo così definire uno stato squeezed a due modi come

$$|\alpha_+, \alpha_-\rangle = D_+(\alpha_+) D_-(\alpha_-) S(\eta) |0\rangle \quad (2.28)$$

Dove l'operatore di traslazione é

$$D_{\pm}(\alpha) = \exp(\alpha a_{\pm}^{\dagger} - \alpha^* a_{\pm}) \quad (2.29)$$

e l'operatore di squeezing a due modi é

$$S(\eta) = \exp(\eta^* a_+ a_- - \eta a_+^{\dagger} a_-^{\dagger}) \quad (2.30)$$

con $\eta = r e^{2i\phi}$. Vediamo gli effetti di questo operatore su a_{\pm} .

$$S(r, \phi) a_{\pm} S^{\dagger}(r, \phi) = a_{\pm} \cosh r + a_{\mp}^{\dagger} e^{2i\phi} \sinh r \quad (2.31)$$

Da questa equazione e dalla definizione degli operatori a_1 e a_2 che quantizzano le ampiezze delle due quadrature del campo elettrico, deduciamo gli effetti dell'operatore $S(r, \phi)$ su a_1 e a_2

$$b_1 \equiv S(r, \phi) a_1 S^{\dagger}(r, \phi) = a_1 (\cosh r + \sinh r \cos 2\phi) + a_2 \sinh r \sin 2\phi \quad (2.32)$$

$$b_2 \equiv S(r, \phi) a_2 S^{\dagger}(r, \phi) = a_2 (\cosh r - \sinh r \cos 2\phi) + a_1 \sinh r \sin 2\phi \quad (2.33)$$

ossia

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh r + \sinh r \cos 2\phi & \sinh r \sin 2\phi \\ \sinh r \sin 2\phi & \cosh r - \sinh r \cos 2\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Per quanto riguarda l'azione dell'operatore di rotazione, possiamo scrivere

$$b_1 \equiv R(\theta) a_1 R^\dagger(\theta) = a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta \quad (2.35)$$

$$b_2 \equiv R(\theta) a_2 R^\dagger(\theta) = a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta \quad (2.36)$$

che si può in effetti scrivere come azione di una matrice di rotazione sul vettore delle quadrature

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Possiamo adesso vedere cosa accade applicando ad a_1 e a_2 una rotazione $R(\theta)$ e uno squeezing $S(r, \phi)$

$$b_i \equiv S(r, \phi) R(\theta) a_i R^\dagger(\theta) S^\dagger(r, \phi) \quad (2.38)$$

semplicemente moltiplicando in successione la matrice nell'Equazione (2.34) e quella nell'equazione (2.37)

In particolare se scegliamo

$$\theta = \arctan\left(\frac{K}{2}\right) \quad \phi = \frac{1}{2} \operatorname{arccot}\left(\frac{K}{2}\right) \quad r = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{K}{2}\right) \quad (2.39)$$

abbiamo che gli effetti della trasformazione (2.38) possono essere rappresentati nella forma

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -K & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

che sarà importante nel seguito. D'ora in avanti utilizzeremo la moltiplicazione per matrici per applicare squeezing e rotazioni al vettore di operatori $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ avendo osservato che questa è consistente con il metodo "classico" di trasformazione degli operatori quantistici.

2.4 La funzione di Wigner

Uno strumento molto utile per descrivere le proprietà degli stati a cui siamo interessati è la funzione di Wigner[5].

Se vogliamo trattare quantisticamente il moto di una particella che, per semplicità, immaginiamo unidimensionale e quindi descrivibile per mezzo degli operatori di posizione \hat{q} e di quantità di moto \hat{p} , è evidente come non sia possibile definire una genuina distribuzione nello spazio delle fasi dal momento che gli operatori \hat{q} e \hat{p} non commutano. È tuttavia possibile definire funzioni come quella di Wigner, dette distribuzioni di quasi-probabilità, che possono essere utilizzate per ricavare separatamente le distribuzioni di probabilità sia per la posizione che per la quantità di moto, o più in generale per qualsiasi combinazione lineare delle due.

Il fatto che queste funzioni non siano vere e proprie distribuzioni di probabilità si può verificare anche notando che in casi particolari esse possono assumere valori negativi. La funzione di Wigner di uno stato

descritto dall'operatore densità $\hat{\rho}$ è definita da

$$W(p, q, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \left\langle q + \frac{x}{2} \left| \hat{\rho}(t) \right| q - \frac{x}{2} \right\rangle dx \quad (2.41)$$

ed è tale che integrando nella variabile p otteniamo la distribuzione di probabilità per la posizione e viceversa integrando nella variabile q otteniamo la distribuzione di probabilità per la quantità di moto. Vediamolo esplicitamente nel primo caso.

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(p, q, t) dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle q + \frac{x}{2} \left| \hat{\rho}(t) \right| q - \frac{x}{2} \right\rangle dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} dp \quad (2.42)$$

Sfruttando la relazione

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} dp = \delta(x) \quad (2.43)$$

otteniamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(p, q, t) dp = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\langle q + \frac{x}{2} \left| \hat{\rho}(t) \right| q - \frac{x}{2} \right\rangle \delta(x) \quad (2.44)$$

e dunque

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(p, q, t) dp = \langle q | \hat{\rho}(t) | q \rangle \equiv W(q, t) \quad (2.45)$$

Abbiamo quindi mostrato che la funzione di Wigner, integrata nella variabile p , ci fornisce la distribuzione di probabilità della posizione $W(q, t)$.

Osserviamo in Figura 2.3 la rappresentazione nello spazio delle quadrature della funzione di Wigner per stati coerenti e stati squeezed della radiazione. Una rappresentazione bi-dimensionale che descrive intuitivamente le proprietà di questi stati è ottenuta sezionando il grafico della funzione di Wigner con un piano alla metà della sua altezza massima. Quello che otteniamo sono circonferenze nel caso di stati coerenti ed ellissi per gli stati squeezed. Ribadiamo che nonostante tali rappresentazioni diano una utile idea intuitiva delle caratteristiche dei suddetti stati, solo le distribuzioni marginali ottenute mediante integrazione in una delle variabili assumono il significato di distribuzione di probabilità.

L'evoluzione della funzione di Wigner nel caso di un Hamiltoniana quadratica, come quelle che ci interessano è data da

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t}(p, q, t) &= \omega \left[-p \frac{\partial W(q, p, t)}{\partial q} + q \frac{\partial W(q, p, t)}{\partial p} \right] \\ &= \left[-\frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial W(q, p, t)}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial W(q, p, t)}{\partial p} \right] \\ &= -\{W(p, q, t), H\}_{PB} \end{aligned} \quad (2.46)$$

dove $\{\}_{PB}$ sono le parentesi di Poisson. Quindi $W(p, q, t)$ evolve secondo l'equazione di Liouville classica.

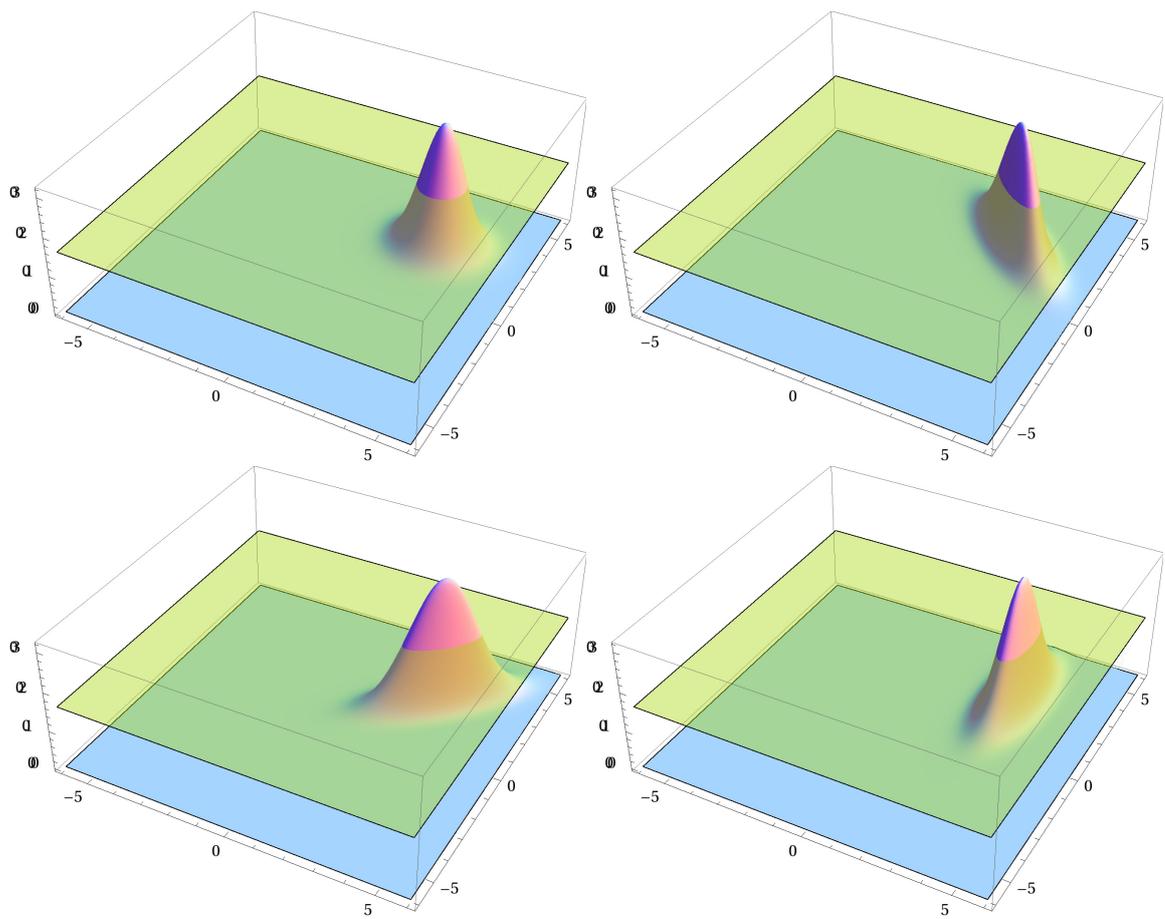


Figura 2.3: Esempi di funzione di Wigner. Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso, la funzione di Wigner per uno stato coerente, per uno stato con squeezing di ampiezza, per uno stato con squeezing di fase e per uno stato con angolo di squeezing generico. La funzione interseca a metà altezza un piano orizzontale.

La soluzione si ottiene osservando che vale

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W(q_{cl}(t), p_{cl}(t), t) &= \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial q}\dot{q}_{cl} + \frac{\partial W}{\partial p}\dot{p}_{cl} \\
&= \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial W}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} \\
&= \frac{\partial W}{\partial t} + \{W, H\}_{PB} = 0
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è conseguenza dell'Equazione (2.46). Quindi la derivata totale di $W(q, p, t)$ valutata lungo la traiettoria classica è nulla, in altre parole la funzione di Wigner è "trascinata" dall'evoluzione classica nello spazio delle fasi. Vale quindi

$$W(q_{cl}(t + \tau), p_{cl}(t + \tau), t' + \tau) = W(q_{cl}(t), p_{cl}(t), t') \quad (2.47)$$

per una qualsiasi traiettoria q_{cl}, p_{cl} nello spazio delle fasi e per arbitrari t, t', τ .

Se consideriamo il caso particolare di uno stato coerente abbiamo

$$W_{\alpha}(q, p, t) = \frac{1}{\pi} \exp \left[- (q - \bar{q}(t))^2 - (p - \bar{p}(t))^2 \right]$$

dove $q_0 = \sqrt{2}\text{Re}\alpha$ e $p_0 = \sqrt{2}\text{Im}\alpha$. Sappiamo da quanto visto in precedenza che l'evoluzione soddisfa la (2.47), quindi deve essere

$$W_{\alpha}(q, p, t) = \frac{1}{\pi} \exp \left[- (q - q_{cl}(t))^2 - (p - p_{cl}(t))^2 \right]$$

Nel caso di uno stato coerente l'unica cosa importante è la posizione del valore medio della Gaussiana, dato che questa è invariante per rotazione attorno ad esso. Per uno stato squeezed perdiamo questa invarianza per rotazione, e ha senso chiedersi come cambia nel tempo la Gaussiana rispetto al suo valore medio. La risposta si ottiene immediatamente osservando che l'evoluzione determinata dall'equazione di Liouville è equivalente alla rotazione rigida di tutto lo spazio delle fasi. Infatti ponendo $t' = 0$ e $t = -\tau$ nella (2.47) troviamo

$$W(q_{cl}(0), p_{cl}(0), \tau) = W(q_{cl}(-\tau), p_{cl}(-\tau), 0) \quad (2.48)$$

da cui

$$W(q, p, t) = W(q_0 \cos \omega t - p_0 \sin \omega t, q_0 \sin \omega t + p_0 \cos \omega t, 0)$$

Quindi anche il profilo della Gaussiana (e quindi l'ellisse di errore) viene ruotato. Un' esempio di evoluzione temporale, per uno stato con squeezing di fase, è rappresentato in Figura 2.4.

2.5 Rivelatori interferometrici di onde gravitazionali

Un rivelatore interferometrico di onde gravitazionali, come VIRGO o LIGO[1], è costituito da un interferometro laser di tipo Michelson con due bracci disposti ad angolo retto (vedi figura 2.5 box verde). Un beam

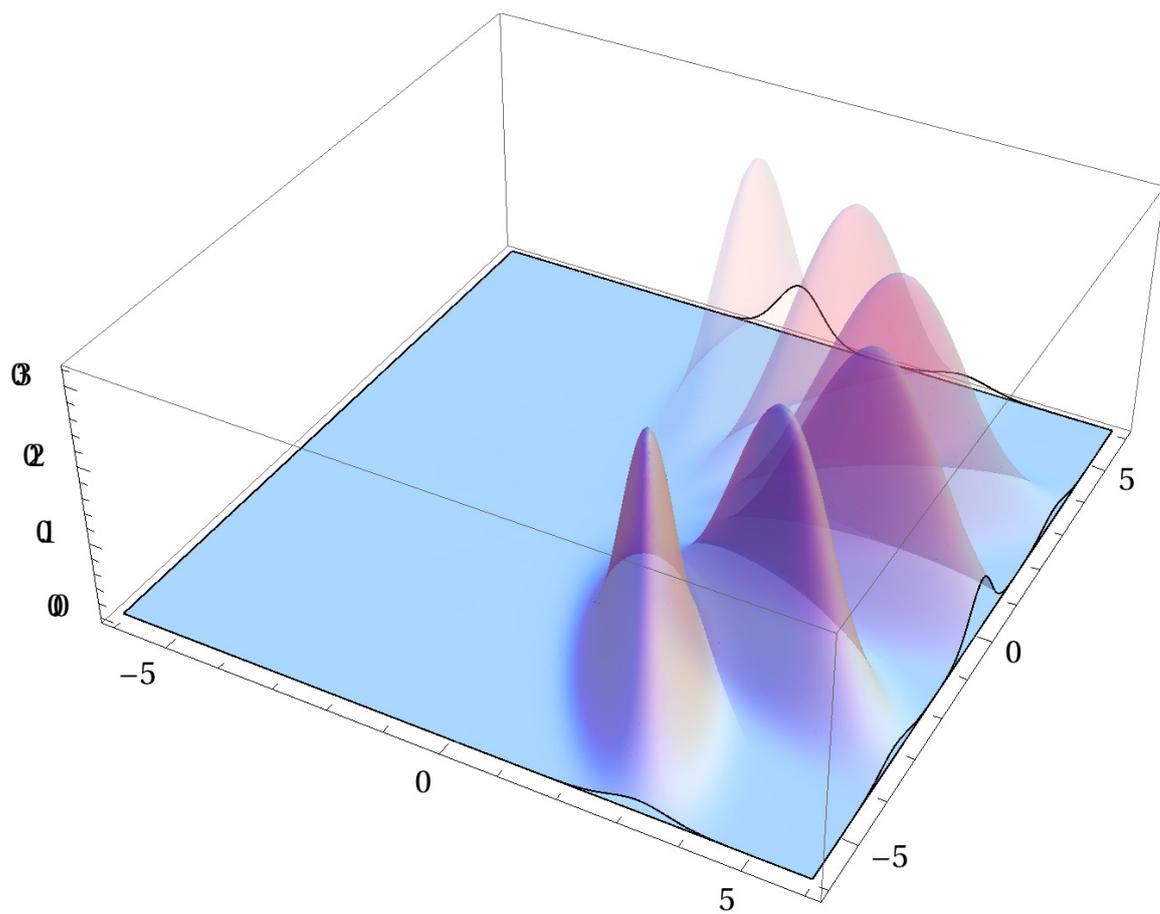


Figura 2.4: L'evoluzione temporale di uno stato con squeezing di fase. La distribuzione di probabilità è trascinata dall'evoluzione classica dell'oscillatore armonico nello spazio delle fasi, cioè ruotata rigidamente attorno all'origine.

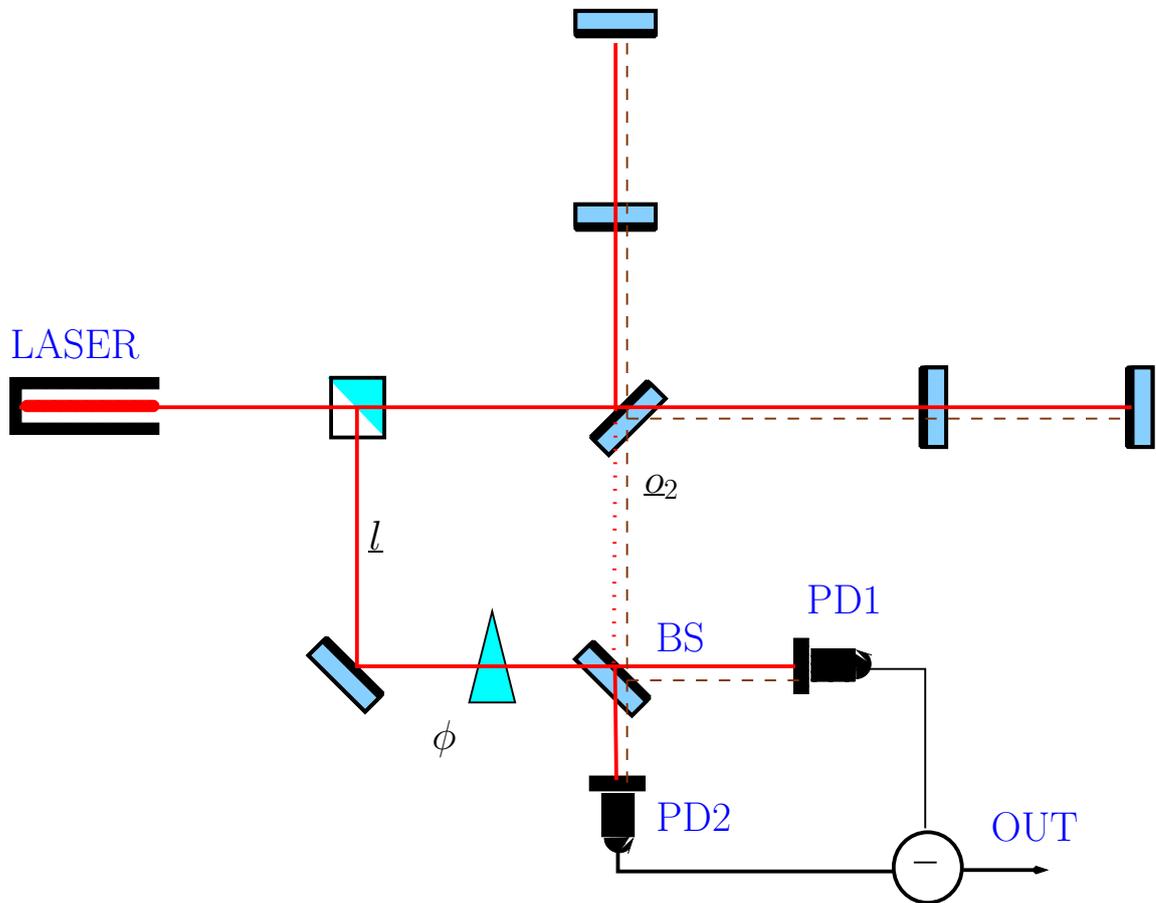


Figura 2.5: Schema semplificato di un rivelatore interferometrico di onde gravitazionali. L'interferometro vero e proprio è contenuto nel box verde, ed è costituito da un beam splitter (**MBS**) e da due cavità Fabry-Perot (**FP1** e **FP2**). La parte contenuta nel box giallo è invece quella necessaria alla misura di una data quadratura del campo uscente con il metodo omodina illustrato in sezione 4.3.

splitter divide il fascio laser entrante in due componenti uguali mandate nei due bracci dell'interferometro. In ciascun braccio è presente una cavità risonante Fabry-Perot, formata da due specchi, che ha l'effetto di amplificare la piccola variazione di distanza causata dal passaggio dell'onda gravitazionale, per mezzo di riflessioni multiple del fascio. I due fasci di luce laser, provenienti dai due bracci, vengono ricombinati prima di essere rivelati.

Possiamo descrivere il fascio laser all'ingresso dell'interferometro come un particolare modo della radiazione elettromagnetica di frequenza ω_0 , in uno stato coerente $|\alpha\rangle$. Il campo sarà descritto dall'insieme degli operatori di quadratura $\vec{a}(\Omega) = \begin{pmatrix} a_1(\Omega) \\ a_2(\Omega) \end{pmatrix}$ nel formalismo a due fotoni. Gli operatori $a_1(\Omega)$ e $a_2(\Omega)$ rappresentano rispettivamente le fluttuazioni nella quadratura di ampiezza e di fase delle bande laterali separate

di Ω dalla portante. Dato che il campo si trova nello stato $|\alpha\rangle$ precedentemente descritto, avremo

$$\langle \alpha | \vec{a}(\Omega) | \alpha \rangle = \delta(\Omega) \sqrt{2} \begin{pmatrix} \text{Re } \alpha \\ \text{Im } \alpha \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

L'espressione precedente esprime il fatto che per $\Omega \neq 0$ le bande laterali si trovano nello stato fondamentale, e quindi hanno valore di aspettazione nullo (è presente però una fluttuazione). Al contrario il modo corrispondente alla portante ha un valore di aspettazione non nullo.

Non possiamo trascurare il modo nello stato di vuoto che entra dalla dark-port dell'interferometro. Quindi descriviamo complessivamente lo stato in ingresso come $|\alpha\rangle \otimes |0\rangle$.

Lavorando in rappresentazione di Heisenberg è possibile mettere in relazione gli operatori $\vec{b}(\Omega)$ che descrivono le quadrature dei modi uscenti dall'interferometro con quelli all'ingresso $\vec{a}(\Omega)$ del laser e $\vec{v}(\Omega)$ dello stato ottenendo

$$\vec{b}(\Omega) = e^{2i\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_I(\Omega) & 1 \end{pmatrix} \vec{v}(\Omega) + e^{i\beta} \sqrt{\frac{2K}{S_h^{SQL}}} \hbar(\Omega) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

dove $\beta = \arctan \Omega/\gamma$ è il ritardo di fase accumulato dalle bande laterali nel percorrere le cavità e

$$S_h^{SQL} = \frac{8\hbar}{m\Omega^2 L^2} \quad (2.51)$$

Il parametro γ è la metà della larghezza di banda delle cavità risonanti e si può scrivere nella forma

$$\gamma = \frac{Tc}{4L} \quad (2.52)$$

dove L è la lunghezza delle cavità e T la trasmittività dei loro specchi frontali. Se T è molto piccolo (alta riflettività) la radiazione che passa all'interno della cavità rimane in essa per un tempo molto lungo, e quindi γ si riduce. Valori tipici di γ per gli attuali rivelatori sono attorno a $\gamma \simeq 2\pi \times 100$ Hz.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_I(\Omega) & 1 \end{pmatrix}$ descrive lo squeezing subito dallo stato in ingresso; esso è detto squeezing ponderomotivo ed è causato dal moto degli specchi indotto dalla pressione di radiazione esercitata dal campo incidente. Le fluttuazioni in ampiezza del campo incidente determinano variazioni della pressione di radiazione e quindi oscillazioni dello specchio; tali oscillazioni inducono fluttuazioni della fase del campo riflesso, come calcolato in (2.14), (2.15) e (2.16). Osserviamo che a seguito di questo fenomeno è introdotta una correlazione fra le fluttuazioni delle due quadrature. $k_I(\Omega)$ può essere interpretato come una misura dell'intensità di questo effetto

Notare che, come indicato, k_I è una funzione della frequenza data esplicitamente da

$$k_I = \frac{I_0}{I_{SQL}} \frac{2\gamma^4}{\Omega^2 (\gamma^2 + \Omega^2)} \quad (2.53)$$

dove

$$I_{SQL} = \frac{mL^2\gamma^4}{4\omega_0} \quad (2.54)$$

è una scala caratteristica per l'intensità I_0 del laser. Notare che k_I è proporzionale a I_0 , ed inversamente proporzionale a Ω^2 per $\Omega \ll \gamma$. Questo si interpreta facilmente tenendo conto del fatto che le fluttuazioni della pressione di radiazione sono proporzionali a I_0 e che la risposta meccanica degli specchi ad esse è proporzionale a Ω^{-2} , alle frequenze alle quali questi possono essere considerati masse libere. Osserviamo che poiché la lunghezza delle due cavità differisce di poco, al prim'ordine l'operatore in uscita \vec{b} dipende solo dall'operatore in ingresso \vec{v} , dello stato di vuoto e non da \vec{a} .

Il secondo termine rappresenta il segnale che si presenta sotto forma di fluttuazione aggiuntiva delle quadrature. Abbiamo supposto che il segnale contribuisca soltanto alla quadratura b_2 . Questo equivale a imporre che per lo stato coerente valga $\text{Im } \alpha = 0$, cioè ad una particolare scelta della fase per lo stato di ingresso. In questo caso le quadrature a_1, b_1 rappresenteranno le fluttuazioni di ampiezza del campo e le quadrature a_2, b_2 le fluttuazioni di fase dello stesso.

Nella Figura 2.6 sono riportate le ellissi d'errore degli stati squeezed che escono dall'interferometro per diversi valori del fattore di squeezing dell'interferometro k_I . Osserviamo come si modifica l'ellisse (stringendosi e ruotando) all'aumentare di k_I .

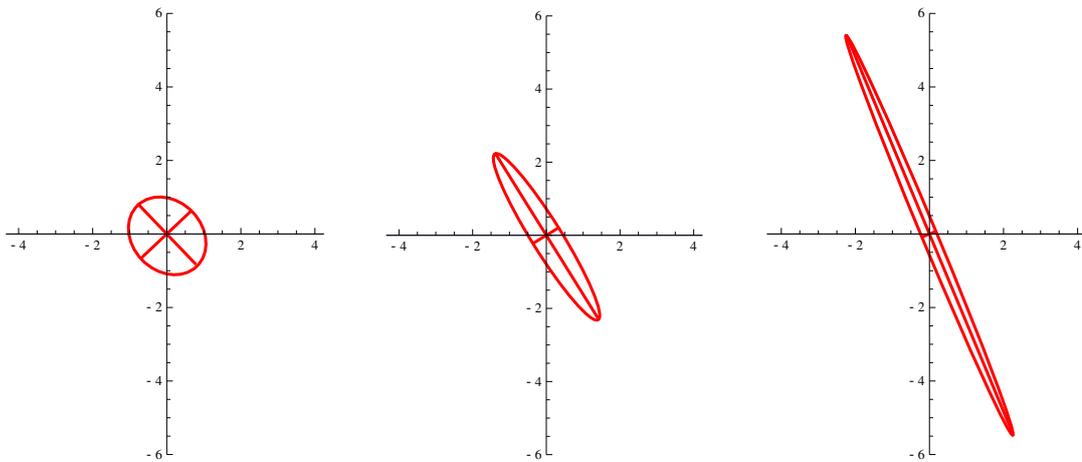


Figura 2.6: Ellisse d'errore per $k_I = 0.1$, $k_I = 1$ e $k_I = 2$.

Capitolo 3

Una strategia di protezione

3.1 Il problema dell'amplificazione

Ci poniamo il problema di amplificare un fascio laser[6]. Gli effetti dell'amplificazione possono essere efficacemente descritti, in rappresentazione di Heisenberg, dagli operatori \hat{a}_{in} e \hat{a}_{out} . Se immaginiamo di utilizzare un amplificatore con guadagno in potenza G potremmo immaginare che valga la relazione

$$\hat{a}_{out} = \sqrt{G}\hat{a}_{in} \quad (3.1)$$

Osserviamo subito che questa relazione viola le regole di commutazione, infatti

$$\left[\hat{a}_{out}, \hat{a}_{out}^\dagger \right] = G \left[\hat{a}_{in}, \hat{a}_{in}^\dagger \right] = G \neq 1 \quad (3.2)$$

Il problema sorge perché non si è tenuto conto dello stato di vuoto che entra dalle porte inutilizzate del dispositivo e che non possiamo trascurare in una descrizione quantistica dell'amplificazione. Come vedremo nel dettaglio analizzando il funzionamento di un beam splitter, la descrizione corretta del processo è

$$\hat{a}_{out} = \sqrt{G}\hat{a}_{in} + \sqrt{G-1}\delta\hat{a}_{vac}^\dagger \quad (3.3)$$

dove $\delta\hat{a}_{vac}$ è l'operatore che descrive lo stato di vuoto in ingresso che per mezzo dell'amplificatore si mescola ad \hat{a}_{in} e che possiamo supporre essere completamente indipendente da questo. Lo stato così ottenuto è notevolmente più rumoroso di quello in ingresso, e il rapporto segnale-rumore è sicuramente peggiorato. Il nostro obiettivo però è quello di amplificare il fascio senza aggiungervi ulteriore rumore. Iniziamo scrivendo l'operatore di annichilazione in termini delle quadrature di ampiezza e di fase.

$$\hat{a} = \frac{1}{2} (X_1 + iX_2) \quad (3.4)$$

È chiaro che se ciascuna quadratura è amplificata della stessa quantità, allora \hat{a} viene semplicemente moltiplicato per il fattore di guadagno e per quanto detto prima diventa necessario considerare il mescolamento di

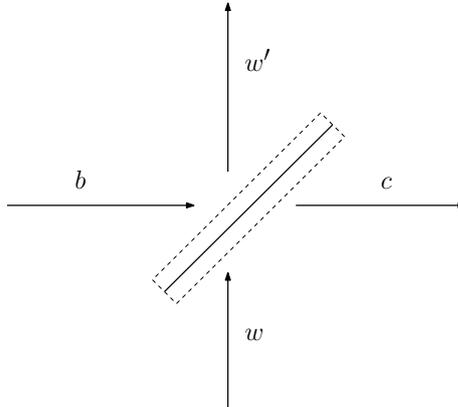


Figura 3.1: Schematizzazione di un beam splitter.

un altro campo, che inevitabilmente aggiunge rumore. Se però consideriamo la situazione in cui, ad esempio, la quadratura di ampiezza è amplificata di una quantità \sqrt{K} mentre la quadratura di fase è “deamplificata” della stessa quantità, quello che otteniamo è

$$\hat{a} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{K} X_1 + \frac{i}{\sqrt{K}} X_2 \right) \quad (3.5)$$

È facile verificare che in questo caso le relazioni di commutazione sono soddisfatte e che quindi questa trasformazione non necessita l’introduzione di operatori che aggiungono rumore. Assicurandoci che il prodotto dei guadagni nelle due quadrature fosse unitario, siamo riusciti ad amplificare una di queste senza introdurre ulteriore rumore. Questo tipo di amplificazione è quella che sfrutteremo per i nostri obiettivi.

Se consideriamo nuovamente l’azione generale della trasformazione di squeezing rappresentata nelle Equazioni (2.32) e (2.33) vediamo che questa equivale alla relazione (2.34). La trasformazione richiesta si ottiene prendendo $\phi = 0$ e $e^r = \sqrt{K}$.

3.2 Il beam splitter

Il beam splitter è un dispositivo ottico, largamente utilizzato negli apparati che trattiamo, nel quale due fasci incidenti interferiscono per produrre due fasci in uscita.

È costituito, nella sua forma più comune da un cubo formato da due prismi triangolari incollati per la base o da uno specchio semiriflettente. Può essere rappresentato schematicamente come in Figura 3.1 ed è caratterizzato da un coefficiente di trasmissività T e un coefficiente di riflessione R legati dalla relazione¹

$$T^2 + R^2 = 1 \quad (3.6)$$

¹In realtà T e R possono essere complessi, ma le fasi possono essere riassorbite ridefinendo i campi in ingresso e in uscita per cui la rappresentazione che segue, pur non essendo la più generale, è in pratica comoda e sufficiente per i nostri scopi.

che garantisce la conservazione dell'energia. Se abbiamo ai due ingressi i campi rappresentati rispettivamente da \hat{b} e \hat{w} alle uscite troviamo.

$$\hat{c} = T\hat{b} - R\hat{w} \quad (3.7)$$

$$\hat{w}' = R\hat{b} + T\hat{w} \quad (3.8)$$

Possiamo scrivere così la trasformazione

$$\begin{pmatrix} \hat{c} \\ \hat{w}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -R \\ R & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -\sqrt{1-T^2} \\ \sqrt{1-T^2} & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{w} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Nel caso in cui non ci sia nessun campo in ingresso nella seconda porta, potremmo credere che sia superfluo specificare negli output il contributo del campo \hat{w} e quindi scrivere

$$\hat{c} = T\hat{b} \quad (3.10)$$

$$\hat{w}' = R\hat{b} \quad (3.11)$$

Come nel caso precedente questi operatori non verificano le relazioni di commutazione

$$[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = T^2 [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = T^2 \quad (3.12)$$

$$[\hat{w}', \hat{w}'^\dagger] = R^2 [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = R^2 \quad (3.13)$$

La ragione di questa discrepanza è che una scelta simile è giustificabile solo da un punto di vista classico, mentre quantisticamente non si possono ignorare le fluttuazioni dell'energia di punto zero dello stato di vuoto che entrano nel secondo ingresso e che contribuiscono ai due fasci in uscita. La descrizione completa che abbiamo dato sopra è quindi l'unica corretta. Applicandola troviamo che le relazioni di commutazione sono verificate.

$$[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = T^2 [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] + R^2 [\hat{w}, \hat{w}^\dagger] = T^2 + R^2 = T^2 + (1 - T^2) = 1 \quad (3.14)$$

Osserviamo che in questo caso lo stato di vuoto gioca un ruolo molto importante nella determinazione degli stati in uscita dal dispositivo ed è necessario tenerlo in considerazione affinché vengano soddisfatte le regole che devono essere valide ogni volta che usiamo una descrizione quantistica dei campi.

3.3 Misura del segnale e dell'errore nello stato in uscita dall'interferometro

Come abbiamo visto nella sezione 2.5, lo stato in uscita dall'interferometro é dato da

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_I & 1 \end{pmatrix} \vec{a} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

dove, per semplificare i calcoli, abbiamo tralasciato i coefficienti di entrambi i termini e cambiando notazione utilizziamo l'operatore \vec{a} per descrivere lo stato di vuoto che entra dalla dark-port.

Siamo interessati a calcolare per ciascuna direzione del piano ampiezza-fase quanto vale il rapporto fra segnale e rumore al quadrato SNR^2 dello stato squeezed. Per semplificare i calcoli scegliamo di trattare separatamente rumore e segnale.

$$\vec{r}(\Omega) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_I(\Omega) & 1 \end{pmatrix} a(\vec{\Omega}) \quad \vec{s}(\Omega) \equiv h(\Omega) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Per la misura del rumore al quadrato nella quadratura $X_{\hat{n}} = \hat{n} \cdot \vec{b}$, con $\hat{n} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, usiamo la definizione dello spettro di potenza di $X_{\hat{n}}$

$$\left\langle X_{\hat{n}}(\Omega) X_{\hat{n}}^\dagger(\Omega') \right\rangle_{symm} = 2\pi\delta(\Omega - \Omega') S_{X_{\hat{n}}}(\Omega) \quad (3.17)$$

dove il valore di aspettazione al primo membro è calcolato sull'operatore simmetrizzato. Nel seguito per brevità eviteremo di indicare esplicitamente la dipendenza dalla frequenza Ω , che sarà ovunque sottintesa, e analogamente sottintenderemo la simmetrizzazione dell'operatore. Applicando questa formula si ottiene

$$2\pi\delta(\Omega - \Omega') N^2 = \hat{n} \langle \vec{r} \vec{r}^\dagger \rangle \hat{n} = \hat{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_I & 1 \end{pmatrix} \langle \vec{a} \vec{a}^\dagger \rangle \begin{pmatrix} 1 & -k_I \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{n} \quad (3.18)$$

e usando la relazione $\langle \vec{a} \vec{a}^\dagger \rangle = 2\pi\delta(\Omega - \Omega')$ otteniamo esplicitamente

$$\begin{aligned} N^2 &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -k_I \\ -k_I & 1 + k_I^2 \end{pmatrix}}_{m. \text{ correlazione}} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \cos^2 \theta + (1 + k_I^2) \sin^2 \theta - 2k_I \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (3.19)$$

Analogamente trattiamo il segnale \vec{s} , ottenendo

$$\begin{aligned} S^2 &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= h^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (3.20)$$

La matrice di correlazione ricavata sopra fornisce informazioni sull'ellisse d'errore dello stato: questa si costruisce calcolando autovalori e autovettori della matrice e imponendo che gli assi dell'ellisse siano nella direzione degli autovettori e della lunghezza degli autovalori. Ora siamo in grado di calcolare SNR^2 in funzione dell'angolo θ :

$$SNR^2(\theta) = \frac{S^2}{N^2} = \frac{h^2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + (1 + k_I^2) \sin^2 \theta - 2k_I \cos \theta \sin \theta} \quad (3.21)$$

Cerchiamo il valore dell'angolo θ per il quale abbiamo il massimo di SNR^2 ; per farlo scriviamo SNR^2 in funzione di $\cot \theta$:

$$SNR^2(\theta) = \frac{h^2}{\cot^2 \theta - 2k_I \cot \theta + 1 + k_I^2}$$

Minimizziamo il denominatore cercando il valore di θ che ne annulla la derivata e troviamo che questo accade quando $\cot \theta = k_I$. Sostituendo tale valore nell'espressione abbiamo $SNR_{max}^2 = h^2$. Nella figura 3.2 vediamo riportati in un grafico polare, per due diversi valori di k_I , il segnale, il rumore e il rapporto SNR^2 . Osserviamo come il valore SNR_{max}^2 resta costante all'aumentare di k_I mentre cambia la direzione alla quale è rivelato.

3.4 Il problema delle perdite

Quando il fascio viene rilevato dal fotodiodo questo subisce perdite che vanno a compromettere lo squeezing dello stato. Possiamo schematizzare ciò immaginando che il fascio prima della rivelazione passi attraverso ad un beam splitter con coefficiente di trasmissione T , simile a quello rappresentato in Figura 3.1. Facendo riferimento ad essa, se \vec{b} rappresenta il fascio in uscita dall'interferometro, \vec{c} sarà quello entrante nel fotodiodo. Lo stato in uscita dal beam splitter \vec{c} risente delle fluttuazioni dello stato di vuoto \vec{w} provenienti dall'ambiente,

$$\vec{c} = T\vec{b} + \sqrt{1 - T^2}\vec{w} \quad \text{con} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_I & 1 \end{pmatrix} \vec{a} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Con gli stessi procedimenti di prima vediamo come le perdite modificano lo squeezing dello stato e il rapporto SNR^2 . Separiamo per semplicità rumore e segnale, come abbiamo fatto prima, e calcoliamo la matrice di

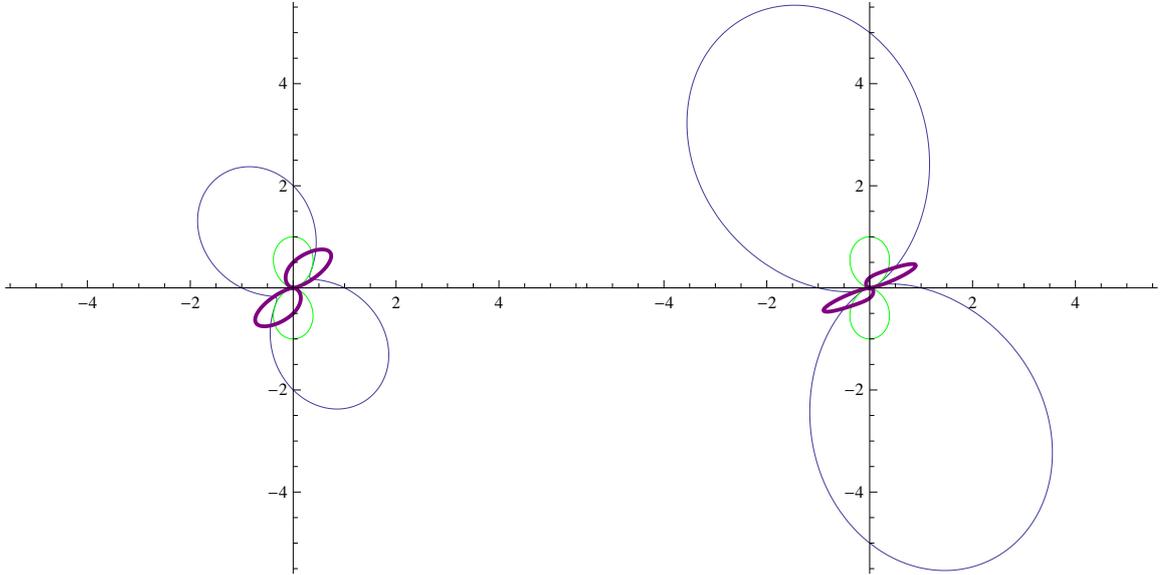


Figura 3.2: Rappresentazione polare di SNR^2 per $k_I = 1$ e $k_I = 2$. In blu è rappresentato N^2 , in verde S^2 ed in viola SNR^2 .

correlazione C del rumore \vec{c}_n che ora comprende anche il rumore dello stato di vuoto

$$\vec{c}_n = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_I & 1 \end{pmatrix} \vec{a} + \sqrt{1-T^2} \vec{w} = T\vec{r} + \sqrt{1-T^2} \vec{w} \quad (3.23)$$

$$\vec{s} = Th \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

da cui

$$\begin{aligned} C &= \langle \vec{c}_n \vec{c}_n^\dagger \rangle = T^2 \langle \vec{r} \vec{r}^\dagger \rangle + (1-T^2) \langle \vec{w} \vec{w}^\dagger \rangle + T\sqrt{1-T^2} \langle \vec{b} \vec{w}^\dagger + \vec{w} \vec{b}^\dagger \rangle \\ &= T^2 \begin{pmatrix} 1 & -k_I \\ -k_I & 1+k_I^2 \end{pmatrix} + (1-T^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -T^2 k_I \\ -T^2 k_I & 1+T^2 k_I^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.25)$$

dove per il calcolo dei valori di aspettazione abbiamo utilizzato le relazioni $\langle \vec{w} \vec{w}^\dagger \rangle = 2\pi\delta(\Omega - \Omega') \mathbb{I}$ e $\langle \vec{b} \vec{w} + \vec{w} \vec{b} \rangle = 0$ poiché \vec{b} e \vec{w} sono non correlati. Osserviamo che la matrice di correlazione nel caso delle perdite e quella nel caso senza perdite coincidono, come è ovvio, per $T = 1$. Dal calcolo degli autovalori e degli autovettori della nuova matrice di correlazione C possiamo ricavare gli assi dell'ellisse d'errore dello stato per diversi valori di T e vedere come lo squeezing dello stato sia compromesso all'aumentare delle

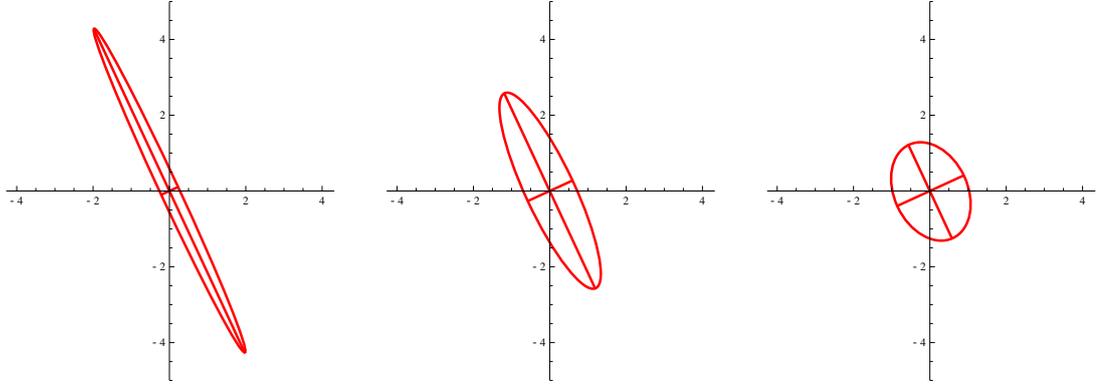


Figura 3.3: Nella figura osserviamo come si deteriora uno stato squeezed con $K = 1.7$ rispettivamente per i valori del coefficiente di trasmissione $T = 1$, $T = 0.6$ e $T = 0.25$.

perdite. (Figura3.3)

Ora calcoliamo SNR^2 nel caso con perdite sfruttando le definizioni di rumore che abbiamo introdotto prima

$$\begin{aligned}
 N^2 &= \hat{n} \cdot C \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -T^2 k_I \\ -T^2 k_I & 1 + T^2 k_I^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\
 &= (1 - T^2) + T^2 [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta (1 + k_I^2) - 2k_I \cos \theta \sin \theta]
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

da cui

$$\begin{aligned}
 SNR^2 &= \frac{T^2 h^2 \sin^2 \theta}{(1 - T^2) + T^2 [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta (1 + k^2) - 2k \cos \theta \sin \theta]} \\
 &= \frac{T^2 h^2}{(1 - T^2) (1 + \cot^2 \theta) + T^2 [\cot^2 \theta + (1 + k^2) - 2k \cot \theta]} \\
 &= \frac{T^2 h^2}{\cot^2 \theta - 2T^2 k_I \cot \theta + (1 + T^2 k_I^2)}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Analogamente al caso senza perdite troviamo che il massimo di SNR^2 si ha per $\cot \theta = T^2 k_I$ e vale

$$SNR_{max}^2 = \frac{T^2 h^2}{1 + k_I^2 (T^2 - T^4)} \tag{3.28}$$

Osserviamo che all'aumentare delle perdite, ovvero quando il coefficiente di trasmissione T del beam splitter tende a zero, anche SNR_{max}^2 tende a zero e che per T fissato SNR_{max}^2 decresce all'aumentare di k_I .

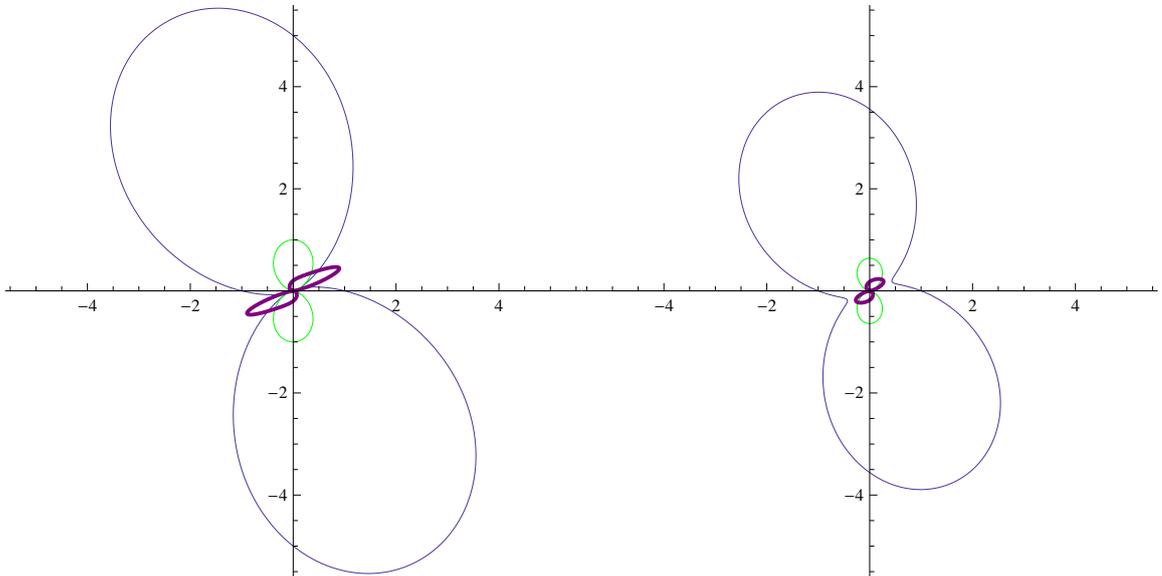


Figura 3.4: Rappresentazione polare di SNR^2 per $k_I = 2$ e rispettivamente $T = 1$ e $T = 0.8$. In blu è rappresentato N^2 , in verde S^2 ed in viola SNR^2 . Osserviamo come SNR^2 diminuisce bruscamente anche in presenza di perdite lievi.

3.5 Amplificazione: una strategia di protezione

Il tentativo che facciamo per proteggere il segnale dalle inevitabili perdite che subisce quando lo stato viene rivelato è quello di amplificarlo sottoponendolo a rotazione e squeezing opportuni. Il nostro obiettivo è confrontare, in diversi casi, il rapporto segnale-rumore dello stato rivelato, in modo da determinare quale combinazione di rotazioni e squeezing è in grado di proteggere meglio il segnale dalle perdite. Abbiamo considerato le seguenti possibilità applicate allo stato che esce dall'interferometro:

1. \Rightarrow **rivelazione (viola)**

In questo caso viene semplicemente rivelata la quadratura di fase dello stato in uscita dall'interferometro, e quindi non si cerca di ottimizzare SNR^2 misurando tale rapporto nella direzione in cui è massimo.

2. \Rightarrow **squeezing $k_1 \Rightarrow$ rivelazione (giallo)**

In questo caso il fascio viene sottoposto ad uno squeezing con coefficiente k_1 prima che ne venga rivelata la quadratura di fase. Anche qui, come prima, non si seleziona la direzione di misura in modo da ottimizzare SNR^2 .

3. \Rightarrow **rotazione $\theta_1 \Rightarrow$ rivelazione (rosso)**

In questo caso il fascio viene sottoposto ad una rotazione di angolo θ_1 prima che ne venga rivelata la quadratura di fase. Come vedremo in seguito esplicitamente questa rotazione ha il compito di selezionare la direzione di misura in modo da massimizzare SNR^2 .

4. \Rightarrow **squeezing** $k_1 \Rightarrow$ **rotazione** $\theta_2 \Rightarrow$ **rivelazione (verde)**

In questo caso il fascio viene sottoposto ad uno squeezing con coefficiente k_1 e poi ad una rotazione di angolo θ_1 che, come nel caso precedente, permette di rivelare il fascio nella direzione in cui SNR^2 è massimo.

5. \Rightarrow **rotazione** $\theta_1 \Rightarrow$ **squeezing** $k_1 \Rightarrow$ **rivelazione (blu)**

In questo caso il fascio viene sottoposto ad una rotazione di angolo θ_1 e successivamente ad uno squeezing con coefficiente k_1 . Il fascio viene poi rivelato nella quadratura di fase e quindi non nella direzione in cui SNR^2 è massimo.

6. \Rightarrow **rotazione** $\theta_1 \Rightarrow$ **squeezing** $k_1 \Rightarrow$ **rotazione** $\theta_2 \Rightarrow$ **rivelazione (nero)**

In questo caso il fascio viene sottoposto ad una rotazione di angolo θ_1 e ad uno squeezing con coefficiente k_1 . Successivamente gli si applica una rotazione di angolo θ_2 che, come abbiamo detto, permette di rivelare il fascio nella direzione in cui SNR^2 è massimo.

Ruotare lo stato in uscita di un angolo θ equivale ad applicarvi la matrice di rotazione

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

mentre l'operazione di squeezing (con coefficiente di squeezing k_1) equivale all'applicare allo stato la matrice

$$S(k_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Ad esempio lo stato del punto **6**, di cui siamo interessati a conoscere il valore di SNR^2 , sarà

$$\vec{c}_6 = T \left[R(\theta_2) S(k_1) R(\theta_1) \vec{b} \right] + \sqrt{1 - T^2} \vec{w}$$

Nella Figura 3.5 riportiamo il rapporto segnale-rumore, massimizzato rispetto agli angoli θ_1 e θ_2 , per due diversi valori del coefficiente di squeezing k_1 , in funzione del coefficiente di trasmissione T .

Osserviamo che la prima rotazione θ_1 ha il compito di ruotare lo stato prima che questo venga amplificato. Il suo ruolo è fondamentale in quanto l'amplificazione come è evidente dalla forma dell'operatore che lo genera è strettamente dipendente dalla posizione: per un qualsiasi vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ abbiamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -kx + y \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Quindi, ad esempio, un vettore nella direzione $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ come il nostro segnale, nel caso non sia stato ruotato, non è influenzato dall'amplificazione. La seconda rotazione θ_2 serve invece all'ottimizzazione della dire-

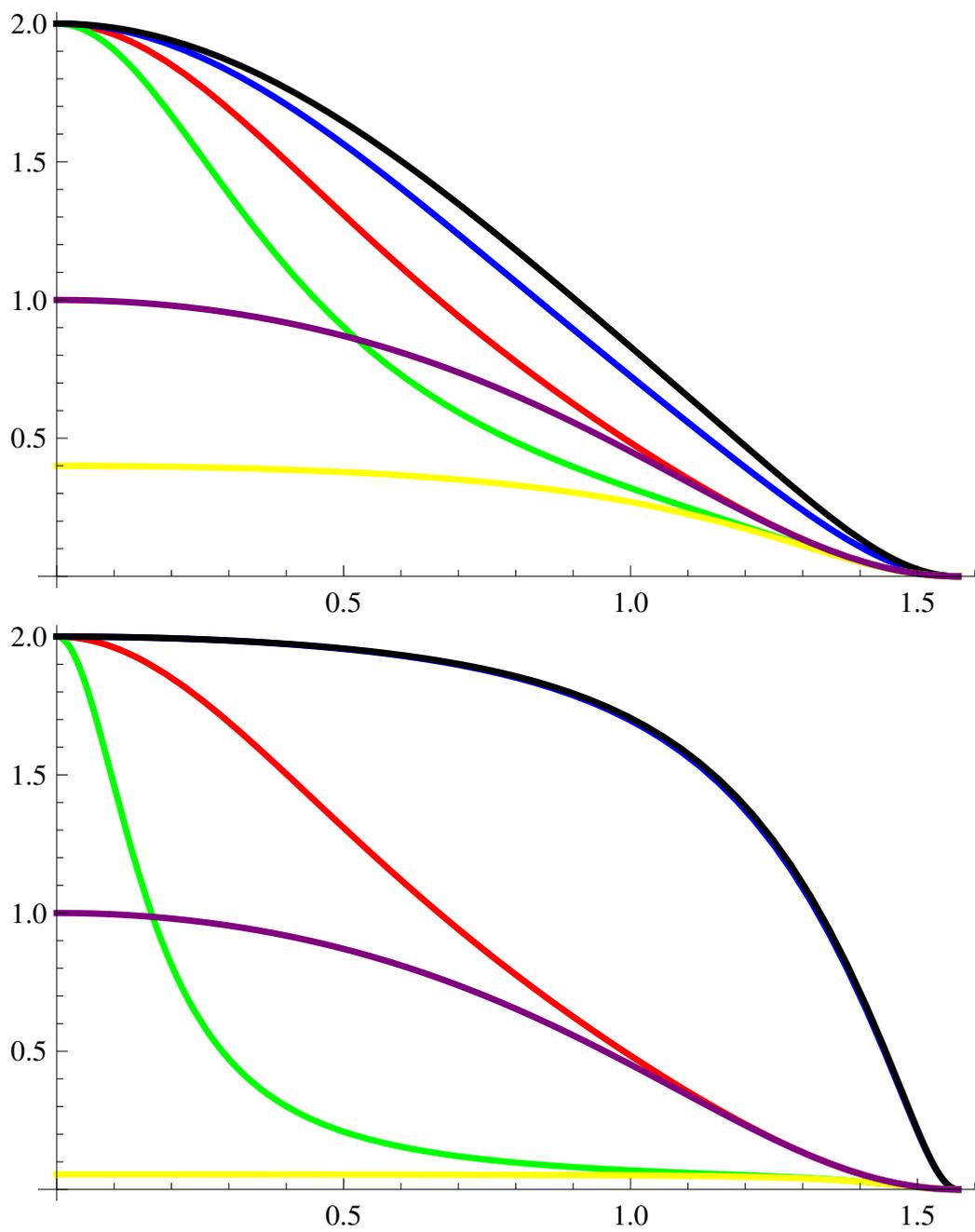


Figura 3.5: Grafico di SNR^2 in funzione del coefficiente di trasmissione T , rispettivamente per $k_1 = 1$ e $k_1 = 5$

zione di rivelazione: applicare l' ultima rotazione R_2 è equivalente a scegliere la direzione dei rivelazione $\hat{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$. Supponiamo di avere la matrice X su cui vogliamo fare le nostre misure, allora avremo:

$$\begin{aligned} \hat{n}(\theta) \langle R_2(\theta_2) X X^\dagger R_2^\dagger(\theta_2) \rangle \hat{n}(\theta) &= \hat{n}(\theta) R_2(\theta_2) \langle X X^\dagger \rangle R_2^\dagger(\theta_2) \hat{n}(\theta) \\ &= \hat{n}(\theta - \theta_2) \langle X X^\dagger \rangle \hat{n}(\theta - \theta_2) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Scegliamo, quindi di affidare alla rotazione R_2 il compito di ruotare lo stato in modo da ottimizzare la misura e fissiamo invece la direzione a $\theta = \frac{\pi}{2}$ e quindi $\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Osserviamo che applicare ad uno stato due squeezing consecutivi le cui matrici associate sono

$$S_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_{1,2} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

equivale ad applicarvi uno squeezing la cui matrice associata è

$$S_{1+2} = S_1 S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(k_1 + k_2) & 1 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Se consideriamo che lo stato esce dall'interferometro avendo subito uno squeezing k_I , i casi **3** e **4**, differiscono solo per l'ampiezza del coefficiente di squeezing e per entrambi abbiamo

$$SNR_{max}^2 = \frac{T^2 h^2}{1 + k^2 (T^2 - T^4)} \quad (3.35)$$

con k che vale rispettivamente k_I nel caso **3** e $k_I + k_1$ nel caso **4**.

Dall'osservazione dei grafici notiamo che i risultati peggiori si hanno quando l'amplificazione è fatta "alla cieca" ovvero senza una rotazione preliminare R_1 che permetta di selezionare la direzione migliore in cui farla. Analiticamente ciò è evidente dal valore di SNR_{max}^2 nel caso con perdite che abbiamo riportato sopra: il rapporto, per $T \neq 0$, decresce all'aumentare di k e quindi se non ci è possibile ruotare lo stato in modo da scegliere la direzione di amplificazione è meglio non amplificare.

Osserviamo che, per un valore del coefficiente di trasmissione T sufficientemente basso, il caso **4** nel quale comunque è ottimizzata la direzione di rivelazione, fornisce risultati peggiori del caso **1** in cui non c'è squeezing ma la direzione di misura è fissata a $\theta = \frac{\pi}{2}$.

I risultati migliori si ottengono nei casi **5** e **6**: in particolare il fatto che **5** sia molto migliore di **4** ci indica che al fine della protezione del segnale la rotazione R_1 è più determinante di R_2 .

Un'altra osservazione interessante è suggerita dal raffronto dei due grafici per diversi valori di k_1 : vediamo, infatti, che all'aumentare di k_1 , la curva che descrive il caso **5** tende a coincidere con quella nel caso **6**. Il fatto che per grandi valori di k_1 diventi ininfluente ottimizzare la direzione di rivelazione può essere interpretato pensando che la prima rotazione venga sfruttata in parte per preparare lo stato all'amplificazione

e in parte per ottimizzarne la direzione di rivelazione.

Sempre dal raffronto dei due grafici notiamo come nel caso **6** l'aumento del coefficiente di amplificazione k_1 consenta di proteggere il segnale in maniera efficace anche per perdite consistenti.

Ciò che in sostanza si evidenzia dai grafici è che l'amplificazione è un mezzo molto efficace per proteggere il segnale quando è possibile applicarlo in maniera mirata mentre diventa controproducente se applicato alla cieca.

Capitolo 4

Cenni sulla realizzazione pratica di alcune tecniche presentate

4.1 Realizzazione dello squeezing

Le tecniche pratiche di produzione di luce squeezed sono svariate e la loro trattazione è un argomento vasto e complesso che non intendiamo approfondire in questo lavoro. Come si può intuire dalla forma dell'operatore di squeezing (Equazione 2.26) solitamente lo squeezing è generato quando uno stato coerente si trova ad interagire con un sistema non lineare che introduce una correlazione fra le fluttuazioni delle due quadrature. Per illustrare questo meccanismo consideriamo il caso particolare di un fascio che si propaga in un mezzo con indice di rifrazione che dipende dall'intensità del campo. Possiamo scrivere

$$n(E) = n_0 \left(1 + n_2 \overline{E^2} \right) \quad (4.1)$$

dove $\overline{E^2}$ rappresenta il valore mediato su un tempo grande rispetto al periodo della portante. Il fascio può essere descritto come un campo modulato

$$E(t) = [\alpha_{in} + \delta a_1(t)] \cos \omega_0 t + \delta a_2(t) \sin \omega_0 t \quad (4.2)$$

dove $\delta a_1(t)$ e $\delta a_2(t)$ rappresentano le fluttuazioni delle quadrature di ampiezza e di fase. Come conseguenza dell'espressione (4.1), le fluttuazioni in intensità moduleranno l'indice di rifrazione e questo a sua volta modulerà la fase dell'onda trasmessa. Per un mezzo di lunghezza L e un campo con lunghezza d'onda λ la fase in uscita sarà data da

$$\phi_{out} = \phi_{in} + \frac{2\pi n L}{\lambda} = \phi_{in} + \frac{2\pi n_0 L}{\lambda} \left\{ 1 + n_2 \overline{[\alpha_{in} + \delta a_1(t)] \cos \omega_0 t + \delta a_2(t) \sin \omega_0 t}^2 \right\} \quad (4.3)$$

Prendendo le fluttuazioni al primo ordine otteniamo

$$\delta\phi_{out} = \delta\phi_{in} + \frac{2\pi n_0 L}{\lambda} n_2 \left[\overline{2\alpha_{in}\delta a_1(t) \cos^2 \omega_0 t + 2\alpha_{in}\delta a_2(t) \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t} \right] \quad (4.4)$$

e mediando,

$$\delta\phi_{out} = \frac{1}{\alpha_{in}} \delta a_2 + \frac{2\pi n_0 L}{\lambda} n_2 \alpha_{in} \delta a_1(t) \quad (4.5)$$

dove si è tenuto conto del fatto che $\delta\phi_{in} = \delta a_2 / \alpha_{in}$.

Ampiezza e fluttuazioni di intensità restano invariate (indichiamo con δb_i le fluttuazioni del campo in uscita)

$$\alpha_{out} = \alpha_{in} = \alpha \quad \delta b_1(t) = \delta a_1(t)$$

mentre le fluttuazioni di fase in uscita saranno la somma di quelle in entrata e di una componente collegate alle fluttuazioni di intensità in ingresso. Usando la relazione 1.4, ciò può essere scritto in termini di quadrature.

$$\delta b_2(t) = \alpha_{out} \delta\phi_{out} = \delta a_2(t) + \frac{2\pi n_0 n_2 L}{\lambda} \alpha^2 \delta a_1(t) \quad (4.6)$$

Osserviamo quindi come un mezzo non lineare sia in grado di correlare le fluttuazioni nelle due quadrature del campo che lo attraversa, generando all'uscita uno stato di luce squeezed.

Abbiamo ora trattato un caso particolare, ma è possibile generalizzare questo risultato: infatti, poiché abbiamo bisogno di un processo non lineare per ottenere la correlazione fra le quadrature, esistono svariate interazioni di questo tipo che possiamo utilizzare.

Un modello di interazione che conduce alla produzione di uno stato squeezed è quello descritto dalla Hamiltoniana della forma

$$\hat{H}_I = i\hbar g \left[\hat{b}^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 - \hat{b} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \right] \quad (4.7)$$

Questa, per mezzo di un processo non lineare (cubico), converte i fotoni del modo \hat{b} in fotoni nei modi \hat{a}_1 e \hat{a}_2 , conservando l'energia. In questo caso la correlazione non è creata fra le quadrature di uno stesso stato ma fra quelle di due stati differenti.

In opportune condizioni sperimentali il campo descritto dall'operatore \hat{b} è uno stato coerente dominato dal valore medio e l'evoluzione temporale si riduce all'operatore di squeezing a due modi (2.30) con $\eta = \hbar g \langle b \rangle$. Lo squeezing ponderomotivo attivo in una cavità risonante può pure ricondursi ad una Hamiltoniana di questo tipo, dove l'operatore \hat{b} descrive non un modo del campo elettromagnetico ma un modo di oscillazione meccanico della cavità.

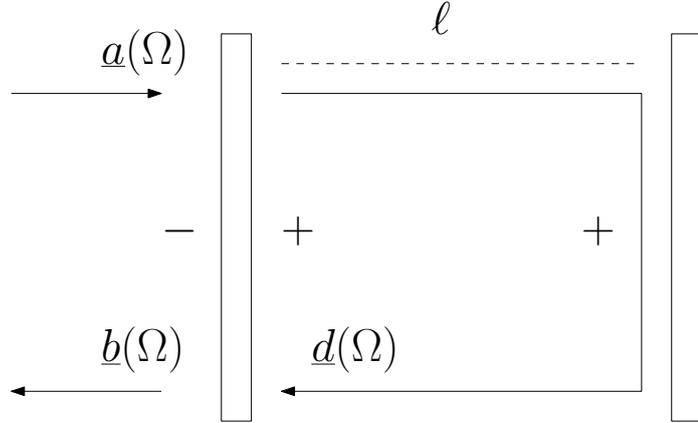


Figura 4.1: Una cavità risonante di lunghezza ℓ fissata. Lo specchio a sinistra è semiriflettente, con trasmissività t e riflessività r . Il campo entrante è a , quello uscente b .

4.2 Rotazioni del fascio per mezzo di cavità risonanti

Come abbiamo visto, per realizzare una determinata strategia di amplificazione può essere necessario introdurre una rotazione delle quadrature. Osserviamo anzitutto che la relazione tra le quadrature di un fascio che si propaga liberamente tra due punti separati da una distanza ℓ è dato da

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} a_1(\ell) \\ a_2(\ell) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_+(\ell) + a_-^\dagger(\ell) \\ -ia_+(\ell) + ia_-^\dagger(\ell) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i(\omega_0+\Omega)\ell/c} a_+(0) + e^{-i(\omega_0-\Omega)\ell/c} a_-^\dagger(0) \\ -ie^{i(\omega_0+\Omega)\ell/c} a_+(0) + ie^{-i(\omega_0-\Omega)\ell/c} a_-^\dagger(0) \end{pmatrix} \\
 &= e^{i\Omega\ell/c} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\omega_0\ell/c} a_+(0) + e^{-i\omega_0\ell/c} a_-^\dagger(0) \\ -ie^{i\omega_0\ell/c} a_+(0) + ie^{-i\omega_0\ell/c} a_-^\dagger(0) \end{pmatrix} \\
 &= e^{i\Omega\ell/c} R\left(\frac{\omega_0\ell}{c}\right) \begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Propagandosi liberamente su una distanza ℓ la quadratura a frequenza angolare Ω viene quindi ruotata dell'angolo $\theta = \omega_0\ell/c$ e moltiplicata per un fattore di fase. Questa non è però il tipo di rotazione cercata, è infatti evidente che θ è lo stesso per tutte le quadrature, portante compresa. Ciò significa che relativamente a quest'ultima non si ha alcuna rotazione, ed è proprio una rotazione relativa alla portante quella di cui abbiamo bisogno.

Diamo un esempio semplice di come questa possa essere ottenuta, considerando una cavità risonante rigida di lunghezza ℓ , rappresentata schematicamente in Figura 4.1.

La relazione tra le quadrature del campo entrante e di quello uscente si ottiene dalle relazioni

$$\underline{b} = -r\underline{a} + t\underline{d} \quad (4.8)$$

$$\underline{d} = e^{i\phi} R(\theta) (t\underline{a} + r\underline{d}) \quad (4.9)$$

Dove abbiamo indicato per brevità $\phi = 2\Omega\ell/c$, $\theta = 2\omega_0\ell/c$ ed ommesso di indicare il parametro Ω che identifica la particolare coppia di bande laterali considerata. Dall'equazione (4.9) segue che

$$[1 - re^{i\phi} R(\theta)] \underline{d} = te^{i\phi} R(\theta) \underline{a}$$

ossia

$$\underline{d} = te^{i\phi} [1 - re^{i\phi} R(\theta)]^{-1} R(\theta) \underline{a}$$

e sostituendo nella (4.8) otteniamo

$$\underline{b} = \left\{ -r + t^2 e^{i\phi} [1 - re^{i\phi} R(\theta)]^{-1} R(\theta) \right\} \underline{a}$$

che è formalmente la relazione cercata. Possiamo riscriverla nella forma

$$\underline{b} = [1 - re^{i\phi} R(\theta)]^{-1} [-r + e^{i\phi} R(\theta)] \underline{a}$$

e ancora

$$\begin{aligned} \underline{b} &= [1 - re^{i\phi} R(\theta)]^{-1} e^{i\phi} R(\theta) [1 - re^{-i\phi} R(-\theta)] \underline{a} \\ &= e^{i\phi} R(\theta) [1 - re^{i\phi} R(\theta)]^{-1} [1 - re^{-i\phi} R(-\theta)] \underline{a} \\ &\equiv e^{i\phi} R(\theta) U(\theta, \phi) \underline{a} \end{aligned}$$

La matrice U è unitaria, con $\det U = 1$. Può quindi essere parametrizzata come

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma} \end{pmatrix}$$

e vediamo che, a meno di un fattore di fase che può essere riassorbito nelle quadrature di ingresso e di uscita, realizza una rotazione di un angolo β . Il fatto importante è che β dipende da Ω , e scegliendo opportunamente i parametri della cavità (la trasmissività t dello specchio e la lunghezza ℓ) si può ottenere una rotazione differenziale tra la portante e la quadratura voluta.

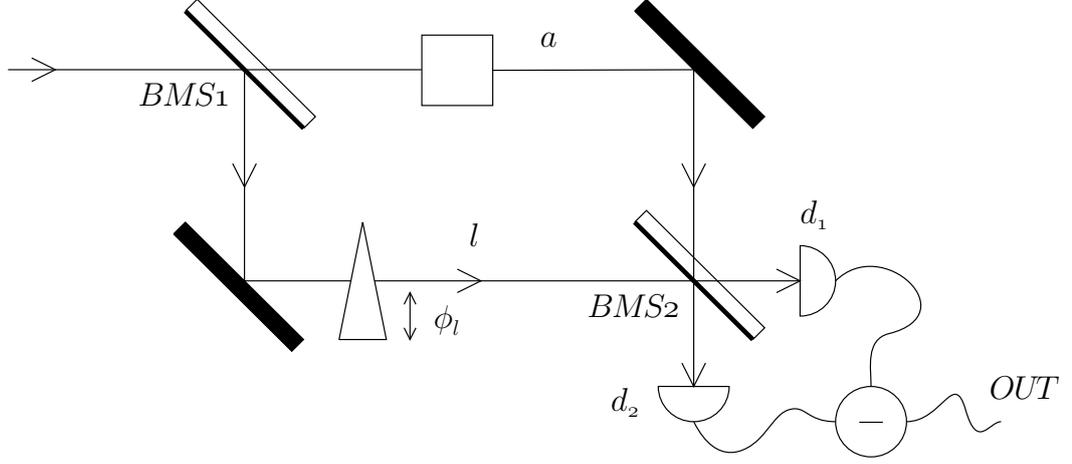


Figura 4.2: Schema della rivelazione omodina

4.3 Rivelazione omodina

Al fine di sfruttare i vantaggi apportati dallo squeezing di uno stato è necessario disporre di un metodo di rivelazione del fascio che permetta di selezionare la quadratura del campo che si intende misurare. Nel proporre la nostra strategia di protezione abbiamo assunto la possibilità di selezionare nel piano ampiezza-fase la direzione in cui fare la nostra misura. Questa operazione è praticamente possibile per mezzo del metodo di rivelazione omodina[6] il cui schema è illustrato in Figura 4.2 e in Figura 2.5 (box giallo).

Per realizzare questa tecnica abbiamo bisogno di un fascio di riferimento, detto oscillatore locale, che serve come riferimento di fase e permette di distinguere fra le due quadrature. Nella rivelazione omodina l'oscillatore locale ha la stessa frequenza del fascio da misurare e può essere creato a partire da quest'ultimo per mezzo di un beam splitter, come avviene in Figura 2.5, dove viene indicato con \underline{l} . Il fascio in uscita dal rivelatore \underline{a} e l'oscillatore locale \underline{l} sono ricombinati per mezzo di un altro beam splitter (**BS** in figura) con coefficiente di trasmissione $T = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e coefficiente di riflessione $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Due fotodiodi PD_1 e PD_2 ricevono quindi il segnale di interferenza. Il campo rivelato da PD_1 sarà

$$\underline{d}_1 = T R(\phi) \underline{l} - R \underline{a} \quad (4.10)$$

dove $R(\phi)$ rappresenta un ritardo che è possibile introdurre nell'apparato. Allo stesso modo il campo rivelato da PD_2 sarà

$$\underline{d}_2 = R R(\phi) \underline{l} + T \underline{a} \quad (4.11)$$

In uscita avremo la differenza delle correnti generate dai fotodiodi, a loro volta proporzionali alle intensità

dei campi, e quindi

$$\begin{aligned}
 \text{OUT} &= \underline{d}_1^T \underline{d}_1 - \underline{d}_2^T \underline{d}_2 \\
 &= T^2 \underline{l}^T \underline{l} + R^2 \underline{a}^T \underline{a} - 2RT \underline{a}^T R(\phi) \underline{l} \\
 &\quad - R^2 \underline{l}^T \underline{l} - T^2 \underline{a}^T \underline{a} - 2RT \underline{a}^T R(\phi) \underline{l}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Dato che $R = T = 1/\sqrt{2}$ l'espressione precedente si riduce a

$$\text{OUT} = -2 \underline{a}^T R(\phi) \underline{l} \tag{4.13}$$

Distinguiamo adesso nei due campi il valore di aspettazione e la fluttuazione, scrivendo $\underline{a} = \underline{\alpha} + \delta \underline{a}$ e $\underline{l} = \underline{\lambda} + \delta \underline{l}$. Supponendo che $|\underline{\lambda}| \gg |\underline{\alpha}|$ avremo per la parte fluttuante del segnale in uscita

$$\delta \text{OUT} \simeq -2 \underline{\lambda}^T R(\phi) \delta \underline{a} \tag{4.14}$$

ed è evidente che agendo sul ritardo è possibile variare la direzione del vettore

$$R(-\phi) \underline{\lambda} \tag{4.15}$$

selezionando quindi la quadratura di $\delta \underline{a}$ misurata.

Bibliografia

- [1] Informazioni aggiornate sui rivelatori attuali di onde gravitazionali possono essere reperite nei siti dei relativi esperimenti: <http://www.virgo.infn.it> (VIRGO), <http://www.ligo.caltech.edu> (LIGO), <http://www.geo600.uni-hannover.de> (GEO600), <http://tamago.mtk.nao.ac.jp> (TAMA).
- [2] Thomas Corbitt and Nergis Mavalvala. Quantum Noise in Gravitational-wave Interferometers: Overview and Recent Development. Arxiv: gr-qc/0306055 (2003)
- [3] H. J. Kimble, Yuri Levin, Andrey B. Matsko, Kip S. Thorne and Sergey P. Vyatchanin. Conversion of conventional gravitational-wave interferometers into quantum nondemolition interferometers by modifying their input and/or output optics. *Phys.Rev. D* **65**, 022002 (2001)
- [4] D.F Walls, G.J. Milburn. *Quantum Optics*, second edition. Springer. 2008.
- [5] Wolfgang P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. WILEY-VCH, 2001
- [6] Hans-A. Bachor, Timothy C. Ralph. *A Guide to Experiments in Quantum Optics*. WILEY-VCH, second, revised and enlarged edition, 2003.
- [7] Ulf Leonhardt. Quantum physic of simple optical instruments. *Rep Prog.Phys* **66**, 1207-1249, (2003)
- [8] A.A. Clerk, M.H. Devoret, S.M. Girvin, Florian Marquardt and R.J. Schoelkopf. Introduction to Quantum Noise, Measurement and Amplification. Arxiv: 0810.4729v1 (2008)
- [9] Vladimir B. Braginsky, Farid Ya Khalili. *Quantum Measurements*. Edited by Kip S. Thorne. Cambridge University Press, 1992.